Early Journal Content on JSTOR, Free to Anyone in the World

This article is one of nearly 500,000 scholarly works digitized and made freely available to everyone in the world by JSTOR.

Known as the Early Journal Content, this set of works include research articles, news, letters, and other writings published in more than 200 of the oldest leading academic journals. The works date from the mid-seventeenth to the early twentieth centuries.

We encourage people to read and share the Early Journal Content openly and to tell others that this resource exists. People may post this content online or redistribute in any way for non-commercial purposes.

Read more about Early Journal Content at http://about.jstor.org/participate-jstor/individuals/early-journal-content.

JSTOR is a digital library of academic journals, books, and primary source objects. JSTOR helps people discover, use, and build upon a wide range of content through a powerful research and teaching platform, and preserves this content for future generations. JSTOR is part of ITHAKA, a not-for-profit organization that also includes Ithaka S+R and Portico. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

ZUR LINEAREN TRANSFORMATION DER ϑ-REIHEN*

VON

F. MERTENS

§ 1.

Es sei ω eine complexe Grösse, in welcher der Coefficient von i positiv ist, und zur Abkürzung

$$q = e^{i\pi\omega}.$$

Definirt man die ϑ-Reihen durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(x, \omega) &= \sum (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi ix}, \\
\vartheta_1(x, \omega) &= -i \sum (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\pi ix}, \\
\vartheta_2(x, \omega) &= \sum q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\pi ix}, \\
\vartheta_3(x, \omega) &= \sum q^{n^2} e^{2n\pi ix},
\end{aligned}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

so besteht die lineare Transformation dieser Reihen in der Ersetzung von ω durch $(\gamma + \delta\omega)/(\alpha + \beta\omega)$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügende Zahlen sind.

Wird zur Abkürzung

$$\alpha + \beta\omega = N, \quad \gamma + \delta\omega = M$$

gesetzt, so kann mit Hilfe der elementaren Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(x, 1 + \omega) &= \vartheta_3(x, \omega), \\
\vartheta_1(x, 1 + \omega) &= e^{\frac{i\pi}{4}} \vartheta_1(x, \omega), \\
\vartheta_2(x, 1 + \omega) &= e^{\frac{i\pi}{4}} \vartheta_2(x, \omega), \\
\vartheta_3(x, 1 + \omega) &= \vartheta_0(x, \omega), \\
\vartheta_0\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) &= \sqrt{-i\omega}\, e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}} \vartheta_2(x, \omega),
\end{aligned}$$

* Presented to the Society (Chicago) April 6, 1901. Received for publication March 5, 1901.

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = -i\sqrt{-i\omega}\, e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}}\, \vartheta_1(x, \omega),$$

$$\vartheta_2\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega}\, e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}}\, \vartheta_0(x, \omega),$$

$$\vartheta_3\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega}\, e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}}\, \vartheta_3(x, \omega),$$

leicht gezeigt werden, dass $\vartheta_1(x/N, M/N)$ die Gestalt $a e^{bx^2} \vartheta_1(x, \omega)$ hat, wo a, b Constanten bezeichnen.

Ist nämlich β nicht $= 0$, so sei β' der kleinste nicht negative Rest von δ in Bezug auf den Theiler β und

$$\delta = g\beta + \beta', \qquad \gamma = ga + a',$$

$$\gamma' = -a, \qquad \delta' = -\beta,$$

$$a' + \beta'\omega = N', \qquad \gamma' + \delta'\omega = M'.$$

Es ist dann

$$a'\delta' - \beta'\gamma' = 1, \qquad |\beta'| < |\beta|,$$

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = \vartheta_1\left(\frac{-x}{M'}, g - \frac{N'}{M'}\right) = -e^{\frac{g\pi i}{4}}\, \vartheta_1\left(\frac{x}{M'}, \frac{-N'}{M'}\right)$$

$$= ie^{\frac{g\pi i}{4}} \sqrt{\frac{-iM'}{N'}}\, e^{\frac{i\pi x^2}{M'N'}}\, \vartheta_1\left(\frac{x}{N'}, \frac{M'}{N'}\right);$$

$\vartheta_1(x/N, M/N)$ wird also die behauptete Gestalt haben, wenn $\vartheta_1(x/N', M'/N')$ sie hat. Die Ausdrücke M', N' sind aber insofern einfacher wie M, N, als $|\beta'| < |\beta|$ ist.

Ist β' noch nicht $= 0$, so können ebenso Ausdrücke

$$M'' = \gamma'' + \delta''\omega, \qquad N'' = a'' + \beta''\omega$$

angegeben werden, in welchen $|\beta''| < |\beta'|$ ist, und $\vartheta_1(x/N, M/N)$ hat zugleich mit $\vartheta_1(x/N'', M''/N'')$ die behauptete Gestalt.

Durch Fortsetzung dieser Schlüsse gelangt man zu einer linearen Transformation $(\gamma^{(m)} + \delta^{(m)}\omega)/(a^{(m)} + \beta^{(m)}\omega)$, in welcher $\beta^{(m)} = 0$ ist. Es genügt daher die behauptete Gestalt von $\vartheta_1(x/N, M/N)$ für den Fall $\beta = 0$ nachzuweisen.

Der Gleichung

$$a\delta = 1$$

zufolge ist dann $a = \delta = \pm 1$ und daher

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = \vartheta_1(ax, a\gamma + \omega) = a\, e^{\frac{a\gamma\pi i}{4}}\, \vartheta_1(x, \omega).$$

Um die Constante b zu bestimmen, ersetze man x durch $x + N$. Es wird

$$\vartheta_1\left(\frac{x+N}{N}, \frac{M}{N}\right) = -\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = a\, e^{b(x+N)^2}\vartheta_1(x+N, \omega)$$

$$= a\, e^{bx^2+2bNx+bN^2}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{\vartheta_1(x, \omega)}{q^{\beta^2}e^{2\beta\pi i x}}$$

und nach Forthebung von $a\, e^{bx^2}\vartheta_1(x, \omega)$

$$-1 = e^{2(bN-i\beta\pi)x}\, e^{bN^2} q^{-\beta^2}(-1)^{\alpha+\beta}.$$

Es muss also

$$bN - \beta\pi i = 0, \quad b = \frac{\beta\pi i}{N}$$

sein.

Die grösste Schwierigkeit bereitet die Bestimmung der Constante a. Differentiirt man die Gleichung

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = a\, e^{bx^2}\vartheta_1(x, \omega)$$

nach x und setzt hierauf $x = 0$, so ergiebt sich

$$\frac{1}{N}\vartheta_1'\left(0, \frac{M}{N}\right) = a\,\vartheta_1'(0, \omega).$$

Es ist aber, wenn mit Herrn DEDEKIND

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}}\Pi(1-q^{2n}) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

gesetzt wird,

$$\vartheta_1'(0, \omega) = 2\pi\eta^3(\omega)$$

und daher

$$a = \frac{1}{N}\left(\frac{\eta(M/N)}{\eta(\omega)}\right)^3.$$

Die Bestimmung von a ist hierdurch auf die von $\eta(M/N)$ zurückgeführt.

In dem Folgenden soll der Ausdruck $\eta(M/N)$ mit Hilfe der Formeln

$$\eta(1+\omega) = e^{\frac{i\pi}{12}}\eta(\omega),$$

$$\eta\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega}\,\eta(\omega)$$

ermittelt werden.*

---

* HERMITE, Liouville's Journal, Ser. II., T. III.

DEDEKIND, *Erläuterungen zum XXVII Fragment in Riemann's Werken.*

H. WEBER, *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen* und *Zur Theorie der elliptischen Funktionen*, Acta Mathematica, Bd. VI.

§ 2.

Hilfssatz. Es seien A, B von Null verschiedene complexe Grössen, deren reelle Bestandtheile nicht negativ und nicht beide $= 0$ sind. Zieht man die Quadratwurzeln $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ so aus, dass ihre reellen Bestandtheile positiv sind, so hat auch das Product $\sqrt{A}\sqrt{B}$ einen positiven reellen Bestandtheil und ist daher derjenige Werth der Quadratwurzel $\sqrt{AB}$, welcher dieselbe Eigenschaft hat.

Setzt man

$$\sqrt{A} = a + ia', \quad \sqrt{B} = b + ib',$$

so ist

$$A = a^2 - a'^2 + 2iaa', \quad B = b^2 - b'^2 + 2ibb',$$

$$\sqrt{A}\sqrt{B} = ab - a'b' + i(ab' + ba'),$$

und nach der Annahme a, b positiv, eine der Grössen $a^2 - a'^2$, $b^2 - b'^2$ positiv, die andere nicht negativ. Ist etwa $a^2 - a'^2$ positiv, so sind $a + a'$, $a - a'$ positiv. Da ferner die Grössen $b + b'$, $b - b'$ nicht entgegengesetzte Vorzeichen haben und ihre Summe positiv ist, so ist eine derselben positiv, die andere nicht negativ. Daher ist auch eine der Grössen

$$(a + a')(b - b'), \quad (a - a')(b + b')$$

positiv, die andere nicht negativ und ihre Summe $2(ab - a'b')$ somit positiv.

§ 3.

Es sei

$$\alpha + \beta\omega = N, \quad \gamma + \delta\omega = M,$$

wo α, β, γ, δ ganze, der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügende, Zahlen sind, und es handele sich um die Bestimmung des Ausdrucks $\eta(M/N)$.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\alpha\delta$ oder $\beta\gamma$ ungerade ist.

Sind α, δ ungerade, so darf α positiv angenommen werden, da man eintretendenfalls die Vorzeichen aller vier Zahlen α, β, γ, δ umkehren könnte, ohne den Quotienten M/N zu ändern.

Es sei zunächst β gerade und vom Null verschieden.

Der absolut kleinste Rest δ_1 der ungeraden Zahl $\delta - \beta(\gamma + 1)$ in Bezug auf den Theiler 2β ist ungerade und liegt demzufolge, vom Vorzeichen abgesehen, unter β. Setzt man

$$\delta = g\beta + \delta_1, \quad \gamma = g\alpha + \gamma_1,$$

so ist

$$\alpha\delta_1 - \beta\gamma_1 = 1$$

und γ_1 den Congruenzen

$$g \equiv \gamma + 1 \pmod 2,$$

$$\gamma_1 \equiv \gamma - g \pmod 2$$

zufolge ungerade. Es sei ferner β_1 der absolut kleinste Rest von β in Bezug auf den Theiler $2\delta_1$ und

$$\beta = h\delta_1 + \beta_1, \quad a = h\gamma_1 + a_1,$$

so dass h, β_1 gerade, a_1 ungerade sind.

Bezeichnet $\mathfrak{a}$ die Einheit mit dem Verzeichen von a_1 und setzt man

$$a_1 = \mathfrak{a}a', \quad \beta_1 = \mathfrak{a}\beta', \quad \gamma_1 = \mathfrak{a}\gamma', \quad \delta_1 = \mathfrak{a}\delta',$$

$$a' + \beta'\omega = N', \quad \gamma' + \delta'\omega' = M',$$

so ist

$$a'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

a' positiv und die Bestimmung von $\eta(M/N)$ auf die von $\eta(M'/N')$ zurückführbar.

Man hat, wenn zur Abkürzung

$$a_1 + \beta_1\omega = N_1, \quad \gamma_1 + \delta_1\omega = M_1,$$

$$e^{\frac{i\pi}{12}} = \rho$$

gesetzt wird,

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \eta\left(g + \frac{M_1}{N}\right) = \rho^g \eta\left(\frac{M_1}{N}\right),$$

$$\eta\left(\frac{M_1}{N}\right) = \sqrt{\frac{iN}{M_1}}\,\eta\left(-\frac{N}{M_1}\right),$$

$$\eta\left(\frac{-N}{M_1}\right) = \eta\left(-h - \frac{N_1}{M_1}\right) = \rho^{-h}\eta\left(\frac{-N_1}{M_1}\right),$$

$$\eta\left(\frac{-N_1}{M_1}\right) = \sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}}\,\eta\left(\frac{M_1}{N_1}\right) = \sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}}\,\eta\left(\frac{M'}{N'}\right),$$

wo die Quadratwurzeln, wie überall in dem Folgenden, mit positivem reellen Bestandtheil auszuziehen sind. Hiernach wird

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \rho^{g-h}\sqrt{\frac{iN}{M_1}}\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}}\,\eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Bezeichnen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Einheit mit dem Vorzeichen von γ_1 beziehungsweise δ_1, so hat β der Gleichung $\beta = (a\delta_1 - 1)/\gamma_1$ zufolge das Vorzeichen von $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und jede

der Grössen iN/M_1, $-i\mathfrak{d}M_1$, $-i\mathfrak{c}\mathfrak{d}N$ einen positiven reellen Bestandtheil, daher ist

$$\sqrt{\frac{iN}{M_1}}\sqrt{-i\mathfrak{d}M_1}=\sqrt{\mathfrak{d}N},$$

$$\sqrt{-i\mathfrak{c}\mathfrak{d}N}\sqrt{\mathfrak{c}i}=\sqrt{\mathfrak{d}N},\quad \sqrt{-i\mathfrak{c}\mathfrak{d}N}\sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{d}i}=\sqrt{N}$$

und sonach

$$\sqrt{\frac{iN}{M_1}}=\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{-i\mathfrak{d}M_1}}\,\frac{\sqrt{\mathfrak{c}i}}{\sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{d}i}}.$$

Ist β_1 von Null verschieden, so hat es, der Gleichung $\beta_1=(a_1\delta_1-1)/\gamma_1$ zufolge, das Vorzeichen von $a_1\delta_1/\gamma_1$ oder $\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und die reellen Bestandtheile der Grössen $-iM_1/N_1$, $-1/i\mathfrak{d}M_1$, $-i\mathfrak{c}\mathfrak{d}N'$ sind positiv. Sonach ist

$$\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}}\sqrt{\frac{1}{-i\mathfrak{d}M_1}}=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{d}N_1}}=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{d}N'}},$$

$$\sqrt{-i\mathfrak{c}\mathfrak{d}N'}\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}i}=\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{d}N'},\quad \sqrt{-i\mathfrak{c}\mathfrak{d}N'}\sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{d}i}=\sqrt{N'},$$

und demzufolge

$$\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}}=\frac{\sqrt{-i\mathfrak{d}M_1}}{\sqrt{N'}}\,\frac{\sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{d}i}}{\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}i}}.$$

Diese Gleichung ist aber auch noch richtig, wann $\beta_1=0$ ist, weil dann $a_1\delta_1=1$, also

$$a_1=\delta_1=\mathfrak{a}=\mathfrak{d},\quad N'=1,$$

$$\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}}=\sqrt{-i\mathfrak{d}M_1},\quad \sqrt{i\mathfrak{a}\mathfrak{c}}=\sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{d}i}$$

ist.

Die Einsetzung der gefundenen Werthe von $\sqrt{iN/M_1}$, $\sqrt{-iM_1/N_1}$ ergiebt

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right)=\frac{\rho^{g-h}\sqrt{\mathfrak{c}i}\sqrt{N}}{\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}i}\sqrt{N'}}\,\eta\left(\frac{M'}{N'}\right);$$

da aber

$$\mathfrak{c}i=i^{\mathfrak{c}},\quad \mathfrak{a}\mathfrak{c}i=i^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}$$

ist, so wird

$$\sqrt{\mathfrak{c}i}=e^{\frac{\mathfrak{c}\pi i}{4}},\quad \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}i}=e^{\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\pi i}{4}},$$

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{c}i}}{\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}i}}=e^{\frac{i\pi}{4}\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a})}=i^{\frac{\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a})}{2}}$$

und demnach

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\,\eta\left(\frac{M}{N}\right)=\rho^{g-h}i^{\frac{\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a})}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{N'}}\,\eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Die Potenz

$$i^{\frac{\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a})}{2}}$$

lässt sich mit Hilfe des LEGENDRE-JACOBI'schen Zeichens vereinfachen.

Die Identität

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a}) &= (1-\mathfrak{a})a'\gamma_1 + (\mathfrak{a}-1)(a'\gamma_1 - \mathfrak{c})\\ &= (a'-a)\gamma_1 + (a-a_1)\gamma_1 + \mathfrak{c}(\mathfrak{a}-1)(a'\mathfrak{c}\gamma_1 - 1)\end{aligned}$$

ergiebt nach Ersetzung von $a - a_1$ durch $h\gamma_1$

$$\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a}) = h\gamma_1^2 + (a'-a)\gamma_1 + \mathfrak{c}(\mathfrak{a}-1)(a'\mathfrak{c}\gamma_1 - 1),$$

und es wird daher, weil γ_1 ungerade ist,

$$\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a}) \equiv h + (a'-a)\gamma_1 + (\mathfrak{a}-1)(a'\mathfrak{c}\gamma_1 - 1) \pmod 8,$$

$$i^{\frac{\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a})}{2}} = i^{\frac{h+(a'-a)\gamma_1}{2}}(-1)^{\frac{\mathfrak{a}-1}{2}\frac{a'\mathfrak{c}\gamma_1-1}{2}}.$$

Es ist aber

$$(-1)^{\frac{\mathfrak{a}-1}{2}\frac{a'\mathfrak{c}\gamma_1-1}{2}} = \left(\frac{\mathfrak{a}}{a'\mathfrak{c}\gamma_1}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{a'}\right)\left(\frac{\mathfrak{a}}{\gamma_1}\right),$$

$$i^{\frac{(a'-a)\gamma_1}{2}} = i^{\frac{a-a'}{2}}(-1)^{\frac{a'-1}{2}\frac{\gamma_1+1}{2}}(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{\gamma_1+1}{2}}$$

und nach dem quadratischen Reciprocitätssatze,

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{\gamma_1+1}{2}} = \left(\frac{a'}{-\gamma_1}\right)\left(\frac{-\gamma_1}{a'}\right) = \left(\frac{a'}{\gamma_1}\right)\left(\frac{-\gamma_1}{a'}\right),$$

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{\gamma_1+1}{2}} = \left(\frac{a}{-\gamma_1}\right)\left(\frac{-\gamma_1}{a}\right) \quad \left(\frac{a}{\gamma_1}\right)\left(\frac{-\gamma_1}{a}\right).$$

Aus den Gleichungen

$$a = h\gamma_1 + a_1,$$

$$-\beta\gamma_1 = 1 - a\delta_1, \quad -\beta_1\gamma_1 = 1 - a_1\delta_1$$

folgt überdies

$$\left(\frac{a}{\gamma_1}\right) = \left(\frac{a_1}{\gamma_1}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}\,a'}{\gamma_1}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\gamma_1}\right)\left(\frac{a'}{\gamma_1}\right),$$

$$\left(\frac{-\beta\gamma_1}{a}\right) = \left(\frac{-\gamma_1}{a}\right)\left(\frac{\beta}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{-\gamma_1}{a}\right) = \left(\frac{\beta}{a}\right),$$

$$\left(\frac{-\beta_1\gamma_1}{a'}\right) = \left(\frac{-\gamma_1}{a'}\right)\left(\frac{\beta_1}{a'}\right) = 1, \quad \left(\frac{-\gamma_1}{a'}\right) = \left(\frac{\beta_1}{a'}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{a'}\right)\left(\frac{\beta'}{a'}\right).$$

Somit wird

$$i^{\frac{c(1-\alpha)}{2}} = i^{\frac{h+\alpha-\alpha'}{2}} \left(\frac{\beta}{a}\right)\left(\frac{\beta'}{a'}\right).$$

Nach Ersetzung von $i^{h/2}$ durch ρ^{3h} ergiebt sich daher

$$\left(\frac{\beta}{a}\right) \frac{i^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt{N}}\, \eta\left(\frac{M}{N}\right) = \rho^{g+2h}\left(\frac{\beta'}{a'}\right) \frac{i^{\frac{1-\alpha'}{2}}}{\sqrt{N'}}\, \eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Der Factor ρ^{g+2h} kann in zwei andere zerlegt werden, welche beziehungsweise nur von a, β, γ, δ und a', β', γ', δ' abhängen.

Der einfachste Weg zu dieser Zerlegung beruht auf dem Umstande, dass die Produkte $(a^2-1)(\beta^2-1)$, $(\gamma_1^2-1)(\delta_1^2-1)$ Vielfache von 24 sind. Denn einer der Factoren a^2-1, β^2-1 muss nach dem FERMAT'schen Satze ein Vielfaches von 3 sein, weil a, β nicht beide durch 3 theilbar sein können, und a^2-1 ist ein Vielfaches von 8. Dieselben Gründe gelten für $(\gamma_1^2-1)(\delta_1^2-1)$. Es ist daher

$$\left.\begin{aligned} 1 &\equiv a^2+\beta^2-a^2\beta^2 \\ 1 &\equiv \gamma_1^2+\delta_1^2-\gamma_1^2\delta_1^2 \end{aligned}\right\} \pmod{24},$$

und die Multiplication mit g, h ergiebt

$$\left.\begin{aligned} g &\equiv a\,ga+\beta\,g\beta-a^2\beta\,g\beta \\ h &\equiv \gamma_1\,h\gamma_1+\delta_1\,h\delta_1-h\gamma_1^2\delta_1^2 \end{aligned}\right\} \pmod{24}.$$

Nach Ersetzung von ga, $g\beta$, $h\gamma_1$, $h\delta_1$, durch $\gamma-\gamma_1$, $\delta-\delta_1$, $a-a_1$, $\beta-\beta_1$ folgt hieraus

$$\left.\begin{aligned} g &\equiv a(\gamma-\gamma_1)+\beta(\delta-\delta_1)-a^2\beta(\delta-\delta_1) \\ h &\equiv \gamma_1(a-a_1)+\delta_1(\beta-\beta_1)-h\gamma_1^2\delta_1^2 \end{aligned}\right\} \pmod{24},$$

und man erhält durch Addition

$$\begin{aligned} g+h \equiv\ & a\gamma-a_1\gamma_1+\beta\delta-\beta_1\delta_1-a^2\beta\delta+a_1^2\beta_1\delta_1 \\ & +\delta_1(a^2\beta-a_1^2\beta_1)-h\gamma_1^2\delta_1^2 \pmod{24}. \end{aligned}$$

Ersetzt man aber in den Identitäten

$$a^2\beta-a_1^2\beta_1 = (a^2+aa_1+a_1^2)(\beta-\beta_1)+(a+a_1)(a\beta_1-a_1\beta),$$

$$a\beta-a_1\beta_1 = (a+a_1)(\beta-\beta_1)+a\beta_1-a_1\beta,$$

$\beta-\beta_1$ durch $h\delta_1$, $a\beta_1-a_1\beta$ durch $-h$, so wird

$$\delta_1(a^2\beta-a_1^2\beta_1) = h\delta_1^2(a^2+aa_1+a_1^2)-h\delta_1(a+a_1),$$

$$a\beta-a_1\beta_1 = h\delta_1(a+a_1)-h,$$

und die Addition ergiebt

$$\delta_1(a^2\beta - a_1^2\beta_1) = -a\beta + a_1\beta_1 - h + h\delta_1^2(a^2 + aa_1 + a_1^2).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung nimmt die vorstehende Congruenz für $g + h$, wenn zur Abkürzung

$$A = a\gamma + \beta\delta - a^2\beta\delta - a\beta,$$

$$A' = a'\gamma' + \beta'\delta' - a'^2\beta'\delta' - a'\beta',$$

$$C = h(a^2 + aa_1 + a_1^2 - \gamma_1^2)$$

gesetzt wird, die Gestalt

$$g + 2h \equiv A - A' + \delta_1^2 C \pmod{24}$$

an.

Nach Ersetzung von a durch $h\gamma_1 + a_1$ wird ferner

$$C = (h^3 - h)\gamma_1^2 + 3h^2a_1\gamma_1 + 3ha_1^2.$$

Es ist also einerseits, weil $h^3 - h$ nach dem FERMAT'schen Satze ein Vielfaches von 3 ist,

$$C \equiv 0 \pmod{3}$$

und anderseits, weil h gerade, a_1 und γ_1 ungerade sind,

$$C \equiv -h + h^2 + 3h = 4\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2} + 1\right) \pmod{8}$$

$$\equiv 0 \pmod{8}.$$

Da hiernach C ein Vielfaches von 24 ist, so folgt

$$g + 2h \equiv A - A' \pmod{24},$$

$$\rho^{g+2h} = \rho^{A-A'},$$

und man hat

$$\left(\frac{\beta}{a}\right)\frac{i^{\frac{1-a}{2}}\rho^{-A}}{\sqrt{N}}\,\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{\beta'}{a'}\right)\frac{i^{\frac{1-a'}{2}}\rho^{-A'}}{\sqrt{N'}}\,\eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Ausdruck

$$\left(\frac{\beta}{a}\right)\frac{i^{\frac{1-a}{2}}\rho^{-A}}{\sqrt{N}}\,\eta\left(\frac{M}{N}\right)$$

ungeändert bleibt, wenn man von den Zahlen a, β, γ, δ zu a', β', γ', δ' übergeht. Letztere Zahlen besitzen aber dieselben Eigenschaften, welche bei den

ursprünglichen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vorausgesetzt werden und sind insofern einfacher, als $|\beta'| < |\beta|$ ist. Denn es ist

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

α', δ' ungerade, β' gerade, α' positiv und $|\beta'| < |\delta_1| < |\beta|$.

Ist β' noch nicht $= 0$, so kann eine neue Reihe von vier Zahlen $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ ermittelt werden, für welche der vorstehende Ausdruck denselben Werth hat wie für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Da die Zahlen $|\beta|, |\beta'|, \cdots$ eine abnehmende Reihe bilden, so führt dieses Verfahren nach einigen Schritten zu vier Zahlen $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \gamma^{(n)}, \delta^{(n)}$, deren zweite $= 0$ ist.

Hiermit ist die Aufgabe in allen Fällen auf die Bestimmung des vorstehenden Ausdruckes in dem Falle $\beta = 0$ zurückgeführt. Dann ist aber

$$\alpha = \delta = 1, \quad A = \gamma, \quad \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \left(\frac{0}{1}\right) = 1,$$

und der fragliche Ausdruck wird

$$= \rho^{-\gamma}\, \eta(\gamma + \omega) = \eta(\omega).$$

Somit ist bei geradem β

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) i^{\frac{\alpha-1}{2}} \rho^A \sqrt{N}\, \eta(\omega).$$

Ist β ungerade, so ist $\beta - \alpha$ gerade, $\delta - \gamma$ ungerade,

$$\alpha(\delta - \gamma) - (\beta - \alpha)\gamma = 1$$

und daher nach dem vorhergehenden Falle

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \eta\left[\frac{\gamma + \dfrac{(\delta - \gamma)\omega}{1 + \omega}}{\alpha + \dfrac{(\beta - \alpha)\omega}{1 + \omega}}\right] = \left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha}\right) i^{\frac{\alpha-1}{2}} \rho^C \sqrt{\frac{N}{1 + \omega}}\, \eta\left(\frac{\omega}{1 + \omega}\right),$$

wo

$$C = \alpha\gamma + (\beta - \alpha)(\delta - \gamma)(1 - \alpha^2) - \alpha(\beta - \alpha).$$

Es ist aber

$$\left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$\begin{aligned} C - A - 1 &= (1 - \alpha^2)(\alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma - 1) \\ &= (\alpha^3 - \alpha)(2\delta - \gamma) \\ &\equiv 0 \pmod{24}, \end{aligned}$$

weil $a^3 - a$ durch 3 und 8 theilbar ist, und

$$\eta\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right) = \sqrt{\frac{i(1+\omega)}{\omega}}\,\eta\left(-1-\frac{1}{\omega}\right)$$

$$= \rho^{-1}\sqrt{\frac{i(1+\omega)}{\omega}}\,\eta\left(-\frac{1}{\omega}\right)$$

$$= \rho^{-1}\sqrt{\frac{i(1+\omega)}{\omega}}\,\sqrt{-i\omega}\,\eta(\omega).$$

Da überdies die Grössen iN/ω, $-i\omega/(1+\omega)$, $-i\omega$ positive reelle Bestandtheile haben, so wird

$$\sqrt{\frac{iN}{\omega}}\sqrt{\frac{-i\omega}{1+\omega}} = \sqrt{\frac{N}{1+\omega}}, \quad \sqrt{\frac{iN}{\omega}}\sqrt{-i\omega} = \sqrt{N}$$

und demnach

$$\sqrt{\frac{N}{1+\omega}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{-i\omega}}\sqrt{\frac{-i\omega}{1+\omega}}.$$

Daher ist, wie bei geradem β,

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{\beta}{a}\right) i^{\frac{a-1}{2}} \rho^A \sqrt{N}\,\eta(\omega).$$

§ 4.

Es sei $\beta\gamma$ ungerade. Man darf β positiv annehmen.

Man hat

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \eta\left[\frac{\delta + \gamma\frac{1}{\omega}}{\beta + a\frac{1}{\omega}}\right]$$

und daher auf Grund des bereits erledigten Falles

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{-a}{\beta}\right) i^{\frac{\beta-1}{2}} \rho^B \sqrt{\frac{N}{\omega}}\,\eta\left(\frac{-1}{\omega}\right),$$

wo

$$B = \beta\delta + a\gamma - a\gamma\beta^2 + a\beta$$

ist. Es ist aber

$$\left(\frac{-a}{\beta}\right) = \left(\frac{-1}{\beta}\right)\left(\frac{a}{\beta}\right) = (-1)^{\frac{\beta-1}{2}}\left(\frac{a}{\beta}\right),$$

$$\eta\left(\frac{-1}{\omega}\right)=\sqrt{-i\omega}\,\eta(\omega),$$

$$\sqrt{-iN}\,\frac{1}{\sqrt{-i\omega}}=\sqrt{\frac{N}{\omega}}$$

und sonach

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right)=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)i^{\frac{1-\beta}{2}}\rho^{B}\sqrt{-iN}\,\eta(\omega).$$